Exámenes de Selectividad

Física. Cataluña 2022, Ordinaria

mentoor.es

Problema 1. Campo Gravitatorio

a) **Un satèlit descriu una trajectòria circular de radi R al voltant d'una massa central. El temps que triga a donar-hi una volta sencera és T. Deduïu l'expressió per a calcular la intensitat del camp gravitatori, g, creat per la massa central en els punts de l'òrbita del satèl·lit en funció dels paràmetres R i T. Considereu que la Lluna descriu una òrbita circular al voltant de la Terra amb una distància entre centres de 384×10^6 m i amb un període de $27,3$ dies. Fent ús només d'aquestes dues dades i de l'expressió trobada anteriorment, calculeu la intensitat del camp gravitatori als punts de l'òrbita de la Lluna.**

b) **Deduïu l'expressió de l'energia cinètica mínima necessària perquè un coet de massa m pugui escapar d'un objecte astronòmic de massa M i radi R. Quantes vegades més gran és l'energia cinètica mínima perquè el coet pugui escapar de la Terra respecte de l'energia mínima que necessita per a escapar de la Lluna? (Només podeu fer servir les dades donades tot seguit.)**

Dades:
$M_{\text{Terra}} = 81,3 \times M_{\text{Lluna}}$.
$R_{\text{Terra}} = 3,67 \times R_{\text{Lluna}}$.

Solució:

a) **Un satèlit descriu una trajectòria circular de radi R al voltant d'una massa central. El temps que triga a donar-hi una volta sencera és T. Deduïu l'expressió per a calcular la intensitat del camp gravitatori, g, creat per la massa central en els punts de l'òrbita del satèl·lit en funció dels paràmetres R i T. Considereu que la Lluna descriu una òrbita circular al voltant de la Terra amb una distància entre centres de 384×10^6 m i amb un període de $27,3$ dies. Fent ús només d'aquestes dues dades i de l'expressió trobada anteriorment, calculeu la intensitat del camp gravitatori als punts de l'òrbita de la Lluna.**

Para un satélite que describe una trayectoria circular uniforme, la fuerza gravitatoria proporciona la fuerza centrípeta necesaria para mantener el movimiento circular. Aplicando la segunda ley de Newton:

$$F_{\text{g}} = F_{\text{c}} \quad \Rightarrow \quad m \cdot g = m \cdot \frac{v^2}{R}.$$

Simplificando y eliminando la masa m:

$$g = \frac{v^2}{R},$$

donde v es la velocidad orbital del satélite. La velocidad orbital puede relacionarse con el período T mediante:

$$v = \frac{2\pi R}{T},$$

Sustituyendo en la expresión de g:

$$g = \frac{\left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}.$$

Por lo tanto, la intensidad del campo gravitatorio es:

$$g = \frac{4\pi^2 R}{T^2}.$$

En este caso, se tiene que:

$$R = 384 \cdot 10^6 \text{ m},$$

$$T = 27,3 \text{ días} = 27,3 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s} = 2{,}358720 \cdot 10^6 \text{ s}.$$

Sustituyendo en la expresión de g:

$$g = \frac{4\pi^2 \cdot 384 \cdot 10^6 \text{ m}}{(2{,}358720 \cdot 10^6 \text{ s})^2} = 2{,}72 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2.$$

Por lo tanto, la intensidad del campo gravitatorio es $\boldsymbol{g = \frac{4\pi^2 R}{T^2}}$ y, en el caso propuesto, tiene un valor de $\mathbf{2{,}72 \cdot 10^{-3}}$ $\mathbf{m/s^2}$.

b) **Deduïu l'expressió de l'energia cinètica mínima necessària perquè un coet de massa m pugui escapar d'un objecte astronòmic de massa M i radi R. Quantes vegades més gran és l'energia cinètica mínima perquè el coet pugui escapar de la Terra respecte de l'energia mínima que necessita per a escapar de la Lluna? (Només podeu fer servir les dades donades tot seguit.)**

La energía cinética mínima necesaria para escapar de la influencia gravitatoria de un objeto astronómico es la energía requerida para superar la energía potencial gravitatoria. Esto se conoce como la energía de escape, E_{esc}. Aplicando el principio de la conservación de la energía mecánica, podemos deducir que

$$E_{\text{esc}} = \frac{GMm}{R},$$

donde:
- G es la constante de gravitación universal,
- M es la masa del objeto astronómico,
- R es el radio del objeto astronómico,
- m es la masa del cohete.

Dado que:

$$M_{\text{Tierra}} = 81{,}3 \cdot M_{\text{Luna}},$$

$$R_{\text{Tierra}} = 3{,}67 \cdot R_{\text{Luna}},$$

la energía de escape de la Tierra respecto a la Luna es:

$$\frac{E_{\text{esc,Tierra}}}{E_{\text{esc,Luna}}} = \frac{\frac{GM_{\text{Tierra}}m}{R_{\text{Tierra}}}}{\frac{GM_{\text{Luna}}m}{R_{\text{Luna}}}} = \frac{M_{\text{Tierra}}}{M_{\text{Luna}}} \cdot \frac{R_{\text{Luna}}}{R_{\text{Tierra}}} = 81{,}3 \cdot \frac{1}{3{,}67} = 22{,}1.$$

Por lo tanto, la energía cinética mínima necesaria para escapar de la Tierra es 22,1 veces mayor que la necesaria para escapar de la Luna.

Problema 2. Campo Electromagnético

Un dipol elèctric és un sistema de dues càrregues puntuals d'igual magnitud Q i signe oposat.

a) **Representeu dins del requadre adjunt les línies de camp elèctric creades per un dipol elèctric. Representeu la projecció de les superfícies equipotencials en el pla de la figura. Orientació: per al camp elèctric dibuixeu 12 línies de camp i 3 línies equipotencials per cada càrrega.**

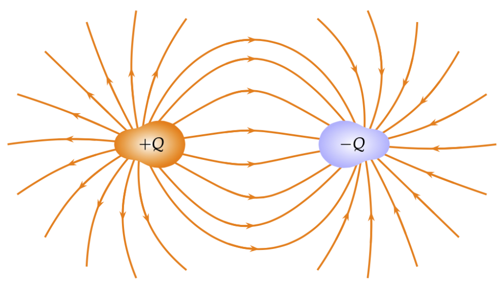
b) **El valor de la càrrega és $|Q| = 1,50\ \mu$C, la càrrega positiva està situada a $-5\ \vec{\imath}$ cm i la càrrega negativa està situada a $5\ \vec{\imath}$ cm. Calculeu el camp elèctric creat pel dipol elèctric a l'origen de coordenades i també el valor del potencial elèctric a l'origen de coordenades. Per a les magnituds vectorials podeu donar les components o el mòdul, la direcció i el sentit.**

Dada:
$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8,99 \times 10^9$ **N m^2 C^{-2}.**

Solució:

a) **Representeu dins del requadre adjunt les línies de camp elèctric creades per un dipol elèctric. Representeu la projecció de les superfícies equipotencials en el pla de la figura. Orientació: per al camp elèctric dibuixeu 12 línies de camp i 3 línies equipotencials per cada càrrega.**

Un dipolo eléctrico consiste en dos cargas puntuales de igual magnitud y signos opuestos. La carga positiva está situada a la izquierda y la carga negativa a la derecha:



Las líneas de campo eléctrico salen radialmente de la carga positiva ($+Q$) y entran radialmente en la carga negativa ($-Q$). Las líneas equipotenciales son perpendiculares a las líneas de campo eléctrico. El dibujo es esquemático y representa adecuadamente la distribución del campo eléctrico y las superficies equipotenciales en el plano.

Por lo tanto, un dipolo eléctrico consiste en dos cargas puntuales de igual magnitud y signos opuestos.

b) **El valor de la càrrega és $|Q| = 1,50\ \mu$C, la càrrega positiva està situada a $-5\ \vec{\imath}$ cm i la càrrega negativa està situada a $5\ \vec{\imath}$ cm. Calculeu el camp elèctric creat pel dipol elèctric a l'origen de coordenades i també el valor del potencial elèctric a l'origen de coordenades. Per a les magnituds vectorials podeu donar les components o el mòdul, la direcció i el sentit.**

Tenemos los siguientes datos:
- $Q = 1{,}50\ \mu\text{C} = 1{,}50 \cdot 10^{-6}$ C.
- Posición de la carga positiva: $x_1 = -5$ cm $= -0{,}05$ m.
- Posición de la carga negativa: $x_2 = 5$ cm $= 0{,}05$ m.
- El origen está en $x = 0$.

Las distancias al origen son:
- $r_1 = |x_1| = 0{,}05$ m.
- $r_2 = |x_2| = 0{,}05$ m.

El campo eléctrico en el origen debido a la carga positiva es:

$$\vec{E}_1 = k \cdot \frac{Q}{r_1^2} \cdot \vec{\imath}.$$

Calculamos:

$$\vec{E}_1 = (8{,}99 \cdot 10^9 \text{ N m}^2\,\text{C}^{-2}) \cdot \frac{1{,}50 \cdot 10^{-6} \text{ C}}{(0{,}05 \text{ m})^2} \cdot \vec{\imath} = 5{,}394 \cdot 10^6 \; \vec{\imath}\,\text{N C}^{-1}.$$

El campo eléctrico en el origen debido a la carga negativa es:

$$\vec{E}_2 = k \cdot \frac{(-Q)}{r_2^2} \cdot (-\vec{\imath}).$$

Nótese que el campo debido a una carga negativa apunta hacia la carga. En este caso, desde el origen hacia $x = 0{,}05$ m (dirección positiva de x), pero como la carga es negativa, el campo resultante en el origen apunta en dirección positiva del eje x. Calculamos:

$$\vec{E}_2 = (8{,}99 \cdot 10^9) \cdot \frac{(-1{,}50 \cdot 10^{-6})}{(0{,}05)^2} \cdot (-\vec{\imath}) \text{ N C}^{-1} = 5{,}394 \cdot 10^6 \; \vec{\imath}\,\text{N C}^{-1}$$

El campo eléctrico total en el origen es:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 5{,}394 \cdot 10^6 \; \vec{\imath} \; + \; 5{,}394 \cdot 10^6 \; \vec{\imath} \; = 1{,}0788 \cdot 10^7 \; \vec{\imath}\,\text{N C}^{-1}.,$$

es decir, tiene un módulo de $1{,}08 \cdot 10^7$ N C^{-1} y está dirigido en el sentido positivo del eje x.

El potencial eléctrico en el origen es la suma de los potenciales debido a cada carga. Potencial debido a la carga positiva:

$$V_1 = k \cdot \frac{Q}{r_1} = (8{,}99 \cdot 10^9) \; \frac{1{,}50 \cdot 10^{-6}}{0{,}05} \text{ V} = 2{,}697 \cdot 10^5 \text{ V}.$$

Potencial debido a la carga negativa:

$$V_2 = k \cdot \frac{(-Q)}{r_2} = (8{,}99 \cdot 10^9) \; \frac{-1{,}50 \cdot 10^{-6}}{0{,}05} \text{ V} = -2{,}697 \cdot 10^5 \text{ V}.$$

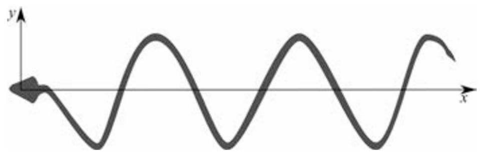
El potencial total en el origen es:

$$V = V_1 + V_2 = 2{,}697 \cdot 10^5 \text{ V} + (-2{,}697 \cdot 10^5 \text{ V}) = 0 \text{ V}.$$

Por lo tanto, el campo eléctrico en el origen es $\mathbf{1{,}0788 \cdot 10^7} \; \vec{\imath}\,\mathbf{N\,C^{-1}}$ y el potencial eléctrico en el origen es 0 V.

Problema 3. Ondas

El moviment d'una anguila es pot aproximar al d'una ona harmònica transversal que es propaga des del cap fins a la cua. Per a estudiar-ne el moviment hem de simplificar: no considerem l'aportació al moviment de la resta de músculs del cos, i suposem, simplement, que l'ona es genera al cap de l'anguila, que vibra amb una freqüència de $0,50$ Hz i amb una amplitud de $5,00$ cm. La distància entre dos punts consecutius del cos de l'anguila que estan en el mateix estat de vibració és de $20,0$ cm.



a) **Calculeu la velocitat a la qual es propaga l'ona pel cos de l'anguila, la freqüència angular i el nombre d'ona. Si a l'instant inicial el cap té una elongació zero i la velocitat d'oscil·lació transversal és positiva, determineu l'expressió de l'equació d'ona. Per a l'equació d'ona utilitzeu el sistema de coordenades de la figura superior, on el cap de l'anguila es troba sempre a l'origen de les abscisses.**

b) **A partir de l'equació d'ona, deduïu i calculeu els mòduls de la velocitat i de l'acceleració màximes de l'oscil·lació transversal. Si la longitud total de l'anguila és de $58,0$ cm, calculeu també la velocitat i l'acceleració transversals a la cua 10 s més tard d'haver iniciat el moviment.**

Solució:

a) **Calculeu la velocitat a la qual es propaga l'ona pel cos de l'anguila, la freqüència angular i el nombre d'ona. Si a l'instant inicial el cap té una elongació zero i la velocitat d'oscil·lació transversal és positiva, determineu l'expressió de l'equació d'ona. Per a l'equació d'ona utilitzeu el sistema de coordenades de la figura superior, on el cap de l'anguila es troba sempre a l'origen de les abscisses.**

La distancia entre dos puntos consecutivos en el mismo estado de vibración es la longitud de onda λ:

$$\lambda = 20 \text{ cm} = 0{,}2 \text{ m}.$$

La frecuencia es:

$$f = 0{,}5 \text{ Hz}.$$

La velocidad de propagación de la onda es:

$$v = \lambda \cdot f = 0{,}2 \text{ m} \cdot 0{,}5 \text{ Hz} = 0{,}1 \text{ m/s}.$$

Hallamos la frecuencia angular ω:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 0{,}5 \text{ Hz} = \pi \text{ rad/s} \approx 3{,}14 \text{ rad/s}.$$

Calculamos el número de onda k:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0{,}2 \text{ m}} = 10\pi \text{ m}^{-1} \approx 31{,}4 \text{ m}^{-1}.$$

La ecuación general de una onda armónica transversal que se propaga en el eje x es:

$$y(x,t) = A \cdot \sin(kx - \omega t + \varphi_0),$$

donde:

– $A = 5{,}00$ cm $= 0{,}0500$ m es la amplitud,
– $k = 10\pi$ m^{-1} es el número de onda,
– $\omega = \pi$ rad/s es la frecuencia angular.

Aplicamos las condiciones iniciales:

– En $t = 0$ y $x = 0$ (la cabeza), la elongación es cero:

$$y(0,0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A \cdot \sin(\varphi_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(\varphi_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_0 = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ \ldots$$

– La velocidad transversal en $t = 0$ y $x = 0$ es positiva. La velocidad transversal es la derivada de la elongación respecto al tiempo:

$$v(x,t) = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = -A\omega \cdot \cos(kx - \omega t + \varphi_0).$$

Evaluando en $x = 0$, $t = 0$:

$$v(0,0) = -A\omega \cdot \cos(\varphi_0).$$

Queremos que $v(0,0) > 0$, entonces:

$$-A\omega \cdot \cos(\varphi_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad \cos(\varphi_0) < 0.$$

Esto ocurre si:

$$\varphi_0 = \pi.$$

Por lo tanto, la ecuación de onda es:

$$y(x,t) = A \cdot \sin(kx - \omega t + \pi).$$

Podemos simplificar usando la identidad $\sin(\theta + \pi) = -\sin(\theta)$:

$$y(x,t) = -A \cdot \sin(kx - \omega t),$$

o también

$$y(x,t) = A \cdot \sin(\omega t - kx).$$

Por lo tanto, la ecuación de onda es:

$$\boldsymbol{y(x,t) = 0{,}05\ \mathrm{m} \cdot \sin(10\pi x - \pi t + \pi),}$$

o equivalentemente

$$\boldsymbol{y(x,t) = -0{,}05\ \mathrm{m} \cdot \sin(10\pi x - \pi t).}$$

b) A partir de l'equació d'ona, deduïu i calculeu els mòduls de la velocitat i de l'acceleració màximes de l'oscil·lació transversal. Si la longitud total de l'anguila és de 58, 0 cm, calculeu també la velocitat i l'acceleració transversals a la cua 10 s més tard d'haver iniciat el moviment.

La velocidad transversal es la derivada parcial de la elongación respecto al tiempo:

$$v(x,t) = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = -A\omega \cdot \cos(kx - \omega t + \pi).$$

El valor máximo del coseno es 1, por lo que la velocidad máxima en módulo es:

$$v_{\text{máx}} = A\omega = 0{,}05\ \mathrm{m} \cdot \pi\ \mathrm{rad/s} = 0{,}157\ \mathrm{m/s}.$$

La aceleración transversal es la derivada parcial de la velocidad respecto al tiempo:

$$a(x,t) = \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = -A\omega^2 \cdot \sin(kx - \omega t + \pi).$$

El valor máximo del seno es 1, por lo que la aceleración máxima en módulo es:

$$a_{\text{máx}} = A\omega^2 = 0{,}05 \text{ m} \cdot (\pi \text{ rad/s})^2 = 0{,}493 \text{ m/s}^2.$$

La posición de la cola es $x = L = 58{,}0$ cm $= 0{,}580$ m. Usando la expresión de la velocidad:

$$v(x,t) = -A\omega \cdot \cos(kx - \omega t + \pi).$$

Calculamos:

$$v(0{,}58 \text{ m},\ 10 \text{ s}) = -0{,}05 \text{ m} \cdot \pi \text{ rad/s} \cdot \cos(10\pi \cdot 0{,}58 - \pi \cdot 10 + \pi) = 0{,}127 \text{ m/s}.$$

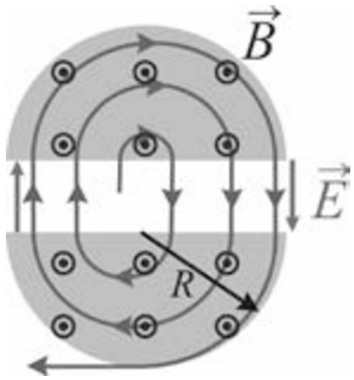
Ahora, calculamos la aceleración:

$$a(x,t) = -A\omega^2 \cdot \sin(kx - \omega t + \pi) \quad \Rightarrow \quad a(0{,}58,\ 10) = -0{,}05 \text{ m} \cdot (\pi \text{ rad/s})^2 \cdot 0{,}5878 = -0{,}29 \text{ m/s}^2.$$

Por lo tanto, la velocidad máxima es $v_{\text{máx}} = 0{,}157$ m/s, la aceleración máxima es $a_{\text{máx}} = 0{,}493$ m/s^2, la velocidad transversal en la cola a $t = 10$ s es $v = 0{,}127$ m/s y la aceleración transversal en la cola a $t = 10$ s es $a = -0{,}29$ m/s^2.

Problema 4. Campo Electromagnético

Un ciclotró és un accelerador de partícules format per dos elèctrodes buits semicirculars (en forma de D) on actua un camp magnètic homogeni perpendicular al pla horitzontal (pla de la figura). Així, a l'interior dels elèctrodes les partícules carregades positives, que es mouen en el pla horitzontal, descriuen una trajectòria circular. A l'espai buit que separa els dos elèctrodes s'aplica un camp elèctric altern, de manera que les partícules són accelerades. Inicialment, les partícules tenen poca velocitat i a cada cicle, en passar d'un semicercle a l'altre, van augmentant de velocitat i de radi de gir fins que finalment surten fora del ciclotró.



a) **Les partícules tenen una càrrega elèctrica positiva q i una massa m. Deduïu l'expressió de la velocitat de les partícules en funció del quocient càrrega-massa (q/m), del radi r de la trajectòria de les partícules i del mòdul del camp magnètic. Comproveu que el temps de recorregut dins una D no depèn de la velocitat de les partícules. Per què el camp elèctric ha de ser altern? Trobeu l'expressió de la freqüència del camp elèctric.**

b) **El ciclotró té un radi de $0,50$ m i un camp magnètic de $0,20$ T. Quan hi accelerem protons, quina velocitat tenen quan surten del ciclotró? Quina és la longitud d'ona associada a aquests protons? Quin radi mínim hauria de tenir el ciclotró per a considerar que els protons tenen velocitats relativistes (és a dir, un 10% de la velocitat de la llum)?**

Dades:
$m_p = 1,67 \times 10^{-27}$ **kg.**
$|e| = 1,602 \times 10^{-19}$ **C.**
$c = 3,00 \times 10^{8}$ $\mathrm{m\,s^{-1}}$.
$h = 6,63 \times 10^{-34}$ **J s.**

Solució:

a) **Les partícules tenen una càrrega elèctrica positiva q i una massa m. Deduïu l'expressió de la velocitat de les partícules en funció del quocient càrrega-massa (q/m), del radi r de la trajectòria de les partícules i del mòdul del camp magnètic. Comproveu que el temps de recorregut dins una D no depèn de la velocitat de les partícules. Per què el camp elèctric ha de ser altern? Trobeu l'expressió de la freqüència del camp elèctric.**

La fuerza magnética que actúa sobre una partícula cargada que se mueve en un campo magnético es:

$$\vec{F}_\mathrm{m} = q\,\vec{v} \times \vec{B}.$$

En este caso, el campo magnético $\vec{B}$ es perpendicular al plano horizontal, y la velocidad $\vec{v}$ de las partículas está en el plano horizontal. Por lo tanto, el ángulo entre $\vec{v}$ y $\vec{B}$ es de 90°, y el módulo de la fuerza magnética es:

$$F_\mathrm{m} = q\,v\,B.$$

Esta fuerza magnética actúa como fuerza centrípeta, manteniendo a las partículas en una trayectoria circular:

$$F_{\mathrm{m}} = F_{\mathrm{c}} \quad \Rightarrow \quad q\,v\,B = m\,\frac{v^2}{r}.$$

Despejando la velocidad v:

$$q\,v\,B = m\,\frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad q\,B = m\,\frac{v}{r} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{q\,B\,r}{m}.$$

El tiempo que tarda una partícula en recorrer medio círculo (una D) es:

$$t = \frac{\pi\,r}{v}.$$

Sustituyendo la expresión de v obtenida anteriormente:

$$t = \frac{\pi\,r}{\frac{q\,B\,r}{m}} = \frac{\pi\,r\,m}{q\,B\,r} = \frac{\pi\,m}{q\,B}.$$

Observamos que el tiempo t no depende de la velocidad v ni del radio r, solo de m, q y B.

Para acelerar las partículas al pasar de una D a la otra, el campo eléctrico en el espacio entre las Ds debe cambiar de dirección en sincronía con el movimiento de las partículas. Dado que las partículas cambian de D cada tiempo t, es necesario que el campo eléctrico alterne su polaridad para que siempre acelere a las partículas en la dirección correcta. Por eso, el campo eléctrico debe ser alterno y sincronizado con el movimiento de las partículas.

La frecuencia del campo eléctrico debe coincidir con la frecuencia con la que las partículas cruzan el espacio entre las Ds. El periodo total para una vuelta completa es:

$$T = 2\,t = 2\,\frac{\pi\,m}{q\,B} = \frac{2\,\pi\,m}{q\,B}.$$

Entonces, la frecuencia del campo eléctrico es:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{q\,B}{2\,\pi\,m}.$$

Por lo tanto, la velocidad de las partículas es $\boldsymbol{v = \frac{q\,B\,r}{m}}$. El tiempo de recorrido dentro de una D es $\boldsymbol{t = \frac{\pi\,m}{q\,B}}$, que no depende de $\boldsymbol{v}$. El campo eléctrico debe ser alterno para sincronizar la aceleración con el paso de las partículas entre las Ds. La frecuencia del campo eléctrico es $\boldsymbol{f = \frac{q\,B}{2\,\pi\,m}}$.

b) **El ciclotró té un radi de $0,50$ m i un camp magnètic de $0,20$ T. Quan hi accelerem protons, quina velocitat tenen quan surten del ciclotró? Quina és la longitud d'ona associada a aquests protons? Quin radi mínim hauria de tenir el ciclotró per a considerar que els protons tenen velocitats relativistes (és a dir, un 10% de la velocitat de la llum)?**

Utilizando la expresión obtenida en el apartado anterior:

$$v = \frac{q\,B\,r}{m}.$$

Sustituyendo los valores dados:

- $q = |e| = 1,602 \cdot 10^{-19}$ C.
- $B = 0,20$ T.
- $r = 0,50$ m.
- $m = m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg.

$$v = \frac{(1,602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}) \cdot (0,20\ \mathrm{T}) \cdot (0,50\ \mathrm{m})}{1,67 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}} = 9,59 \cdot 10^{6}\ \mathrm{m\,s^{-1}}.$$

La longitud de onda de De Broglie es:

$$\lambda = \frac{h}{p},$$

donde p es el momento lineal $p = m\,v$. Calculamos p:

$$p = m\,v = (1,67 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}) \cdot (9,59 \cdot 10^{6}\ \mathrm{m\,s^{-1}}) = 1,601 \cdot 10^{-20}\ \mathrm{kg\,m\,s^{-1}}.$$

Ahora, calculamos λ:

$$\lambda = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J\,s}}{1,601 \cdot 10^{-20}\ \mathrm{kg\,m\,s^{-1}}} = 4,14 \cdot 10^{-14}\ \mathrm{m}.$$

Vamos a calcular el radio mínimo para velocidades relativistas (10% de c). Queremos que $v = 0,10\,c$:

$$v = 0,10 \cdot c = 0,10 \cdot 3,00 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m\,s^{-1}} = 3,00 \cdot 10^{7}\ \mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Utilizamos la expresión:

$$v = \frac{q\,B\,r}{m} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{m\,v}{q\,B}.$$

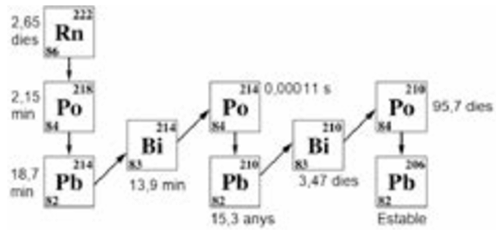
Sustituyendo los valores:

$$r = \frac{(1,67 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}) \cdot (3,00 \cdot 10^{7}\ \mathrm{m\,s^{-1}})}{(1,602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}) \cdot (0,20\ \mathrm{T})} = 1,563\ \mathrm{m}.$$

Por lo tanto:
- **La velocidad de los protones al salir del ciclotrón es $\boldsymbol{v = 9,59 \cdot 10^{6}\ \mathrm{m\,s^{-1}}}$.**
- **La longitud de onda asociada a estos protones es $\boldsymbol{\lambda = 4,14 \cdot 10^{-14}}$ m.**
- **El radio mínimo que debería tener el ciclotrón para que los protones alcancen velocidades relativistas (10% de $\boldsymbol{c}$) es $\boldsymbol{r = 1,56}$ m.**

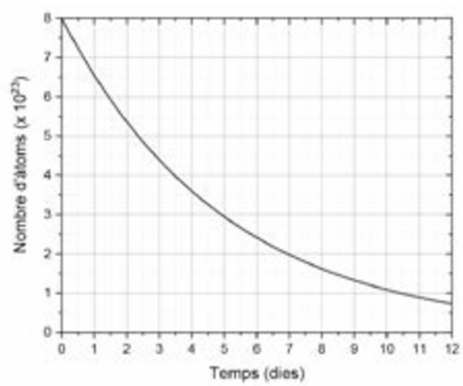
Problema 5. Física Moderna

El gas radó és una de les fonts de radioactivitat natural més abundants de la Terra. El radó prové de la descomposició d'elements radioactius naturals (com l'urani i el tori). El gas es difon a través del sòl fins a arribar a la superfície. La cadena de desintegració del radó $^{222}_{86}\mathrm{Rn}$ inclou vuit desintegracions radioactives, fins que es forma l'isòtop estable del plom $^{206}_{82}\mathrm{Pb}$. En la figura següent es representen els nuclis que formen part d'aquesta cadena de desintegració nuclear. Al costat de cada nucli, se n'indica el període de semidesintegració.



a) **Escriviu les reaccions nuclears que permeten arribar al $^{206}_{82}\mathrm{Pb}$ a partir del $^{222}_{86}\mathrm{Rn}$.**

b) **El gràfic següent correspon a l'evolució dels nuclis d'una de les desintegracions radioactives de la cadena del radó. La mostra estudiada inicialment tenia $8,00 \times 10^{23}$ nuclis. A partir del gràfic, determineu quin és el període de semidesintegració de la mostra, i raoneu a quin nucli de la cadena correspon. Amb aquesta dada calculeu quants dies han de passar fins que s'hagin desintegrat $7,95 \times 10^{23}$ àtoms.**



Solució:

a) **Escriviu les reaccions nuclears que permeten arribar al $^{206}_{82}\mathrm{Pb}$ a partir del $^{222}_{86}\mathrm{Rn}$.**

La cadena de desintegración del $^{222}_{86}\mathrm{Rn}$ hasta el $^{206}_{82}\mathrm{Pb}$ es la siguiente:

1. $^{222}_{86}\mathrm{Rn} \rightarrow {}^{218}_{84}\mathrm{Po} + {}^{4}_{2}\alpha$
2. $^{218}_{84}\mathrm{Po} \rightarrow {}^{214}_{82}\mathrm{Pb} + {}^{4}_{2}\alpha$
3. $^{214}_{82}\mathrm{Pb} \rightarrow {}^{214}_{83}\mathrm{Bi} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e}^- + \overline{\nu}_e$ (Emisión beta)
4. $^{214}_{83}\mathrm{Bi} \rightarrow {}^{214}_{84}\mathrm{Po} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e}^- + \overline{\nu}_e$ (Emisión beta)
5. $^{214}_{84}\mathrm{Po} \rightarrow {}^{210}_{82}\mathrm{Pb} + {}^{4}_{2}\alpha$
6. $^{210}_{82}\mathrm{Pb} \rightarrow {}^{210}_{83}\mathrm{Bi} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e}^- + \overline{\nu}_e$ (Emisión beta)
7. $^{210}_{83}\mathrm{Bi} \rightarrow {}^{210}_{84}\mathrm{Po} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e}^- + \overline{\nu}_e$ (Emisión beta)
8. $^{210}_{84}\mathrm{Po} \rightarrow {}^{206}_{82}\mathrm{Pb} + {}^{4}_{2}\alpha$

Recordemos que:

- ${}^{4}_{2}\alpha$ es una partícula alfa (núcleo de helio).
- ${}^{0}_{-1}\mathrm{e}^-$ es una partícula beta (electrón).
- $\overline{\nu}_e$ es un antineutrino electrónico.

Por lo tanto, la cadena de desintegración consta de 8 reacciones nucleares.

b) **El gràfic següent correspon a l'evolució dels nuclis d'una de les desintegracions radioactives de la cadena del radó. La mostra estudiada inicialment tenia $\mathbf{8,00 \times 10^{23}}$ nuclis. A partir del gràfic, determineu quin és el període de semidesintegració de la mostra, i raoneu a quin nucli de la cadena correspon. Amb aquesta dada calculeu quants dies han de passar fins que s'hagin desintegrat $\mathbf{7,95 \times 10^{23}}$ àtoms.**

El período de semidesintegración ($T_{1/2}$) es el tiempo que tarda en desintegrarse la mitad de los núcleos iniciales. Es decir, cuando el número de núcleos disminuye de $N_0 = 8{,}00 \cdot 10^{23}$ a $N = \dfrac{N_0}{2} = 4{,}00 \cdot 10^{23}$. Observando el gráfico (no proporcionado aquí), determinamos que este punto se alcanza en:

$$T_{1/2} = 3{,}5 \text{ días}.$$

Comparando este valor con los períodos de semidesintegración de los núclidos en la cadena del radón, identificamos que corresponde al ${}^{210}_{83}\mathrm{Bi}$, cuyo período de semidesintegración es aproximadamente 5 días. Dado que 3,5 días se acerca más al período conocido de este isótopo, concluimos que se trata del ${}^{210}_{83}\mathrm{Bi}$.

Vamos a obtener el tiempo necesario para que se desintegren $7{,}95 \cdot 10^{23}$ átomos. Primero, calculamos el número de núcleos restantes después de que se hayan desintegrado $7{,}95 \cdot 10^{23}$ átomos:

$$N(t) = N_0 - \text{átomos desintegrados} = 8{,}00 \cdot 10^{23} - 7{,}95 \cdot 10^{23} = 5{,}00 \cdot 10^{21}.$$

La relación entre el número de núcleos en función del tiempo es:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t},$$

donde λ es la constante de desintegración radiactiva:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{3{,}5 \text{ días}} = \frac{0{,}6931}{3{,}5 \text{ días}} = 0{,}1980 \text{ días}^{-1}.$$

Calculamos la fracción de núcleos restantes:

$$\frac{N(t)}{N_0} = \frac{5{,}00 \cdot 10^{21}}{8{,}00 \cdot 10^{23}} = 6{,}25 \cdot 10^{-3}.$$

Ahora, aplicamos la ecuación de decaimiento:

$$6{,}25 \cdot 10^{-3} = e^{-\lambda t}.$$

Tomando logaritmos naturales:

$$\ln(6{,}25 \cdot 10^{-3}) = -\lambda t.$$

Despejamos t:

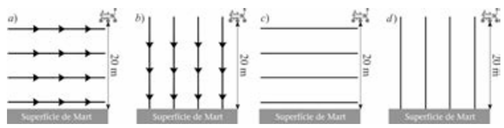
$$t = -\frac{\ln(6{,}25 \cdot 10^{-3})}{\lambda} = 25{,}63 \text{ días}.$$

Por lo tanto, se necesitan aproximadamente 25,63 días para que se desintegren $\mathbf{7{,}95 \cdot 10^{23}}$ átomos de ${}^{210}_{83}\mathbf{Bi}$

Problema 6. Campo Gravitatorio

El juliol del 2020 la NASA va posar en marxa una missió espacial que, entre altres tasques, havia de fer arribar el vehicle d'exploració Perseverance a la superfície de Mart. El 18 de febrer de 2021 va tenir lloc l'aterratge del vehicle. En la darrera etapa d'aquest procés complex d'aterratge, una grua fa baixar d'una manera controlada el vehicle des d'una altura de $20,0$ m per sobre de la superfície de Mart. Durant tot aquest recorregut, la intensitat del camp gravitatori es pot considerar uniforme.

a) **El valor absolut de la diferència de potencial gravitatori entre la superfície del planeta i un punt elevat $20,0$ m per sobre de la superfície és $74,4$ J/kg. A partir de la diferència de potencial, determineu el mòdul de la intensitat del camp gravitatori a la superfície de Mart. Quin dels esquemes següents (a, b, c o d) representa les línies equipotencials a la superfície de Mart? Situeu en el diagrama triat la línia de menor potencial (V_{baix}) i la de major potencial (V_{alt}). Justifiqueu totes les respostes.**



b) **Si durant aquesta darrera etapa, el vehicle fa un descens de $20,0$ m a una velocitat constant, quin treball ha fet la grua? Podeu negligir el treball fet per les forces de fregament.**

Dada:
Massa del vehicle, $m = 1\,025$ kg.

Solució:

a) **El valor absolut de la diferència de potencial gravitatori entre la superfície del planeta i un punt elevat $20,0$ m per sobre de la superfície és $74,4$ J/kg. A partir de la diferència de potencial, determineu el mòdul de la intensitat del camp gravitatori a la superfície de Mart. Quin dels esquemes següents (a, b, c o d) representa les línies equipotencials a la superfície de Mart? Situeu en el diagrama triat la línia de menor potencial (V_{baix}) i la de major potencial (V_{alt}). Justifiqueu totes les respostes.**

Sabemos que la diferencia de potencial gravitatorio en un campo gravitatorio uniforme se calcula como:

$$|\Delta V| = g \cdot d,$$

donde:
- $|\Delta V|$ es el valor absoluto de la diferencia de potencial gravitatorio (J/kg),
- g es la intensidad del campo gravitatorio (m/s^2),
- d es la distancia vertical entre los dos puntos (m).

Despejando g:

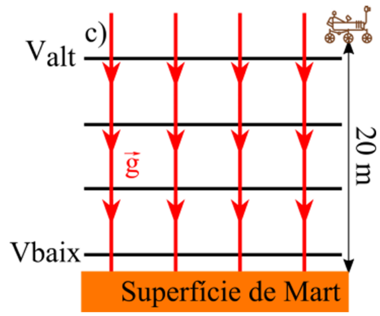
$$g = \frac{|\Delta V|}{d}.$$

Sustituyendo los valores dados:

$$g = \frac{74,4 \text{ J/kg}}{20,0 \text{ m}} = 3,72 \text{ m/s}^2.$$

Las líneas equipotenciales son superficies donde el potencial gravitatorio es constante. En un campo gravitatorio uniforme, como el que se considera en este problema, las líneas equipotenciales son planos horizontales y paralelos entre sí. Además, las líneas de campo gravitatorio son perpendiculares a las superficies equipotenciales y apuntan en la dirección en la que el potencial disminuye. Observando los esquemas proporcionados, el esquema que muestra líneas equipotenciales horizontales es el **esquema c)**.

En un campo gravitatorio, el potencial gravitatorio es mayor en los puntos más elevados y disminuye al acercarse a la superficie del planeta. Por lo tanto:
- La línea equipotencial a mayor altura corresponde a un potencial más alto (V_{alto}).
- La línea equipotencial más cercana a la superficie corresponde a un potencial más bajo (V_{bajo}).



Recordemos que las líneas equipotenciales son perpendiculares a las líneas de campo gravitatorio. En un campo gravitatorio uniforme, las líneas de campo son verticales y apuntan hacia abajo. El potencial gravitatorio disminuye en la dirección del campo gravitatorio.

Por lo tanto, el módulo de la intensidad del campo gravitatorio en la superficie de Marte es $g = 3,72$ m/s^2 y el esquema correcto es el c).

b) Si durant aquesta darrera etapa, el vehicle fa un descens de 20, 0 m a una velocitat constant, quin treball ha fet la grua? Podeu negligir el treball fet per les forces de fregament.

Tenemos que el vehículo desciende $d = 20,0$ m a velocidad constante, por lo que la aceleración es cero. Además, la fuerza neta sobre el vehículo es cero: la fuerza de la grúa ($F_{\text{grúa}}$) equilibra el peso (P):
- Peso: $P = m \cdot g$.
- Fuerza de la grúa: $F_{\text{grúa}}$.

El trabajo realizado por una fuerza constante es:

$$W = F \cdot d \cdot \cos\theta,$$

donde:
- F es la magnitud de la fuerza,
- d es el desplazamiento,
- θ es el ángulo entre la fuerza y el desplazamiento.

En este caso:
- $F = F_{\text{grúa}} = m \cdot g$,
- $d = 20,0$ m,
- $\theta = 180°$ (la fuerza de la grúa es hacia arriba y el desplazamiento hacia abajo).

Entonces,

$$W_{\text{grúa}} = F_{\text{grúa}} \cdot d \cdot \cos(180°) = (m \cdot g) \cdot d \cdot (-1).$$

Sustituyendo los valores:

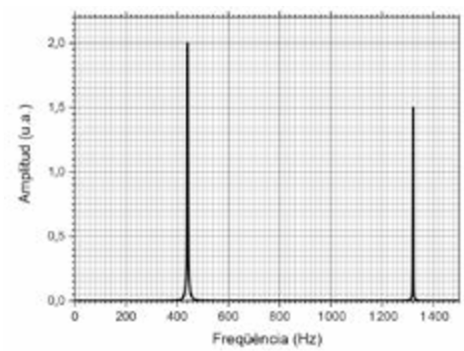
$$W_{\text{grúa}} = -(1\,025 \text{ kg}) \cdot (3,72 \text{ m/s}^2) \cdot (20,0 \text{ m}) = -76\,230 \text{ J}.$$

El trabajo realizado por la grúa es negativo, lo que indica que la fuerza de la grúa realiza un trabajo en sentido opuesto al desplazamiento. La grúa aplica una fuerza hacia arriba para controlar el descenso y mantener la velocidad constante, contrarrestando parcialmente el peso.

Por lo tanto, el trabajo realizado por la grúa es $W_{\text{grúa}} = -76\,230$ J.

Problema 7. Ondas

Per a identificar els instruments musicals es pot utilitzar un espectre de freqüències. A la figura següent es representa l'espectre d'un instrument que es vol identificar. L'oboè és un instrument que té un extrem obert i un extrem tancat que és l'embocadura amb una canya. A l'extrem obert, l'amplitud de la vibració de les molècules és màxima: tenim un ventre. En canvi, a l'altre extrem, el tudell per on es bufa és una canya que comunica pressió a l'aire i impedeix que aquest es pugui moure amb llibertat: és un node. D'altra banda, en un piano les cordes estan pinçades pels dos extrems, és a dir, els dos extrems de la corda són nodes.



a) **Quina és la freqüència fonamental d'aquest espectre? Determineu si es tracta d'un oboè o d'un piano, i justifiqueu la resposta. Determineu també la llargària del tub o de la corda.**
b) **Un quintet de vent acostuma a estar format per cinc instrumentistes, normalment flauta travessera, oboè, clarinet, trompa i fagot. A l'inici de la interpretació d'una composició tots 5 toquen de forma suau i amb la mateixa intensitat, generant un nivell d'intensitat sonora de 80 dB a un espectador que es troba a una distància d'1, 5 m. Quina és la potència sonora de cada instrument? Suposeu que aquesta potència es distribueix uniformement per tota l'àrea d'una semiesfera.**

Dades:
$I_0 = 10^{-12}$ **W m^{-2}.**
La velocitat del so en l'aire és de 340 m s^{-1}.

Solució:

a) **Quina és la freqüència fonamental d'aquest espectre? Determineu si es tracta d'un oboè o d'un piano, i justifiqueu la resposta. Determineu també la llargària del tub o de la corda.**

Observamos que la primera frecuencia que aparece en el espectro es $f_1 = 440$ Hz. Esta es la frecuencia fundamental del instrumento. Analizamos las características de los armónicos:

- *Piano:* Las cuerdas de un piano están pinzadas por ambos extremos, lo que significa que ambos extremos son nodos. En este caso, los armónicos presentes son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental: $f_n = n \cdot f_1$, donde $n = 1, 2, 3, \ldots$
- *Oboe:* El oboe tiene un extremo abierto y otro cerrado. Por lo tanto, los armónicos presentes son múltiplos impares de la frecuencia fundamental: $f_n = n \cdot f_1$, donde $n = 1, 3, 5, \ldots$

Observando el espectro, la segunda frecuencia que aparece es 1320 Hz. Si fuera un piano, esperaríamos que la segunda frecuencia sea 880 Hz ($2 \cdot 440$). Sin embargo, la segunda frecuencia observada es 1320 Hz, lo que corresponde al tercer armónico ($3 \cdot 440$ Hz) propio del oboe.

Para un oboe, que es un tubo abierto en un extremo y cerrado en el otro, la frecuencia fundamental se relaciona con la longitud del tubo L mediante la siguiente fórmula:

$$f_1 = \frac{v}{4L}.$$

Despejando L:

$$L = \frac{v}{4f_1}.$$

Sustituyendo los valores:

$$L = \frac{340 \text{ m/s}}{4 \cdot 440 \text{ Hz}} = \frac{340}{1760} \text{ m} = 0{,}193 \text{ m}.$$

Por lo tanto:
- **La frecuencia fundamental es $f_1 = 440$ Hz.**
- **El instrumento es un *oboe*, ya que los armónicos presentes son múltiplos impares de la frecuencia fundamental.**
- **La longitud del tubo del oboe es $L = 0{,}193$ m.**

b) Un quintet de vent acostuma a estar format per cinc instrumentistes, normalment flauta travessera, oboè, clarinet, trompa i fagot. A l'inici de la interpretació d'una composició tots 5 toquen de forma suau i amb la mateixa intensitat, generant un nivell d'intensitat sonora de 80 dB a un espectador que es troba a una distància d'1, 5 m. Quina és la potència sonora de cada instrument? Suposeu que aquesta potència es distribueix uniformement per tota l'àrea d'una semiesfera.

El nivel de intensidad sonora β en decibelios se relaciona con la intensidad real I mediante la fórmula:

$$\beta = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right),$$

donde $I_0 = 10^{-12}$ W m^{-2} es la intensidad de referencia. Despejamos I:

$$I = I_0 \cdot 10^{\frac{\beta}{10}} = 10^{-12} \text{ W m}^{-2} \cdot 10^{\frac{80}{10}} = 10^{-12} \cdot 10^{8} = 10^{-4} \text{ W m}^{-2}.$$

La potencia total P_{total} emitida por los cinco instrumentos se distribuye uniformemente sobre el área de una semiesfera con radio $r = 1,5$ m. El área de una semiesfera es:

$$A = 2\pi r^2 = 2\pi \cdot (1{,}5 \text{ m})^2 = 2\pi \cdot 2{,}25 \text{ m}^2 = 4{,}5\pi \text{ m}^2.$$

La intensidad sonora total es la potencia total dividida por el área:

$$I = \frac{P_{\text{total}}}{A} \implies P_{\text{total}} = I \cdot A = 10^{-4} \text{ W m}^{-2} \cdot 4{,}5\pi \text{ m}^2 = 1{,}4137 \cdot 10^{-3} \text{ W}.$$

Como hay cinco instrumentos, la potencia de cada uno es:

$$P_{\text{instrumento}} = \frac{P_{\text{total}}}{5} = \frac{1{,}4137 \cdot 10^{-3} \text{ W}}{5} = 2{,}8274 \cdot 10^{-4} \text{ W}.$$

Por lo tanto, la potencia sonora de cada instrumento es $P_{\text{instrumento}} = 2{,}83 \cdot 10^{-4}$ W.

Problema 8. Física Moderna

Considereu un experiment d'efecte fotoelèctric en què el càtode és una làmina de cesi que té una freqüència llindar de $4,59 \times 10^{14}$ Hz.

a) **Calculeu el treball d'extracció del càtode. Si il·luminem el càtode amb els diferents punters làser de la taula que hi ha a continuació, justifiqueu amb quins punters làser es produirà l'efecte fotoelèctric. Completeu la taula i representeu gràficament en la quadrícula adjunta l'energia cinètica màxima dels electrons (en eV) en funció de la freqüència dels fotons incidents (en Hz) per a un interval de freqüències entre $3,00 \times 10^{14}$ Hz i $7,00 \times 10^{14}$ Hz.**

Tipus de punter làser	Longitud d'ona (nm)	Freqüència ($\times 10^{14}$ Hz)	Energia fotó ($\times 10^{-19}$ J)	E_c electró ($\times 10^{-19}$ J)
Làser blau	460			
Làser verd	532			
Làser infraroig	1080			

b) **Il·luminem el càtode amb un làser de freqüència $8,00 \times 10^{14}$ Hz. Calculeu la velocitat i la longitud d'ona de De Broglie dels electrons arrencats del càtode amb la radiació d'aquest làser.**

Dades:
1 eV $= 1,602 \times 10^{-19}$ J.
$m_e = 9,11 \times 10^{-31}$ kg.
$c = 3,00 \times 10^{8}$ m s^{-1}.
$h = 6,63 \times 10^{-34}$ J s.

Solució:

a) **Calculeu el treball d'extracció del càtode. Si il·luminem el càtode amb els diferents punters làser de la taula que hi ha a continuació, justifiqueu amb quins punters làser es produirà l'efecte fotoelèctric. Completeu la taula i representeu gràficament en la quadrícula adjunta l'energia cinètica màxima dels electrons (en eV) en funció de la freqüència dels fotons incidents (en Hz) per a un interval de freqüències entre $3,00 \times 10^{14}$ Hz i $7,00 \times 10^{14}$ Hz.**

El trabajo de extracción es la energía mínima necesaria para arrancar un electrón del metal y se calcula mediante:

$$W_0 = hf_0 = (6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J\,s}) \cdot (4{,}59 \cdot 10^{14}\ \mathrm{Hz}) = 3{,}04 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}.$$

Para que se produzca el efecto fotoeléctrico, la frecuencia de la luz incidente debe ser mayor que la frecuencia umbral f_0. Vamos a calcular las frecuencias y energías de los fotones. Para el láser azul, con longitud de onda $\lambda_b = 460$ nm $= 460 \cdot 10^{-9}$ m:

$$f_b = \frac{c}{\lambda_b} = \frac{3{,}00 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m/s}}{460 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{m}} = 6{,}52 \cdot 10^{14}\ \mathrm{Hz},$$

$$E_b = hf_b = (6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J\,s}) \cdot (6{,}52 \cdot 10^{14}\ \mathrm{Hz}) = 4{,}32 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J},$$

$$E_{c,b} = E_b - W_0 = 4{,}32 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J} - 3{,}04 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J} = 1{,}28 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}.$$

Para el láser verde, con longitud de onda $\lambda_v = 532$ nm $= 532 \cdot 10^{-9}$ m:

$$f_v = \frac{c}{\lambda_v} = \frac{3{,}00 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m/s}}{532 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{m}} = 5{,}64 \cdot 10^{14}\ \mathrm{Hz},$$

$$E_v = hf_v = (6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J\,s}) \cdot (5{,}64 \cdot 10^{14}\ \mathrm{Hz}) = 3{,}74 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J},$$

$$E_{c,v} = E_v - W_0 = 3{,}74 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J} - 3{,}04 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J} = 0{,}70 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}.$$

Para el láser infrarrojo, con longitud de onda $\lambda_{IR} = 1080$ nm $= 1080 \cdot 10^{-9}$ m:

$$f_{IR} = \frac{c}{\lambda_{IR}} = \frac{3{,}00 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1080 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 2{,}78 \cdot 10^{14} \text{ Hz},$$

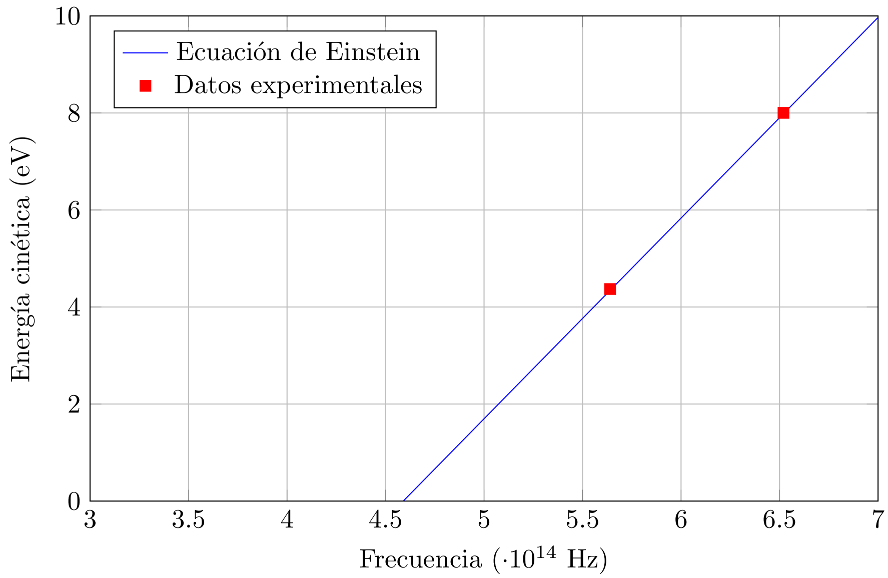
$$E_{IR} = hf_{IR} = (6{,}63 \cdot 10^{-34} \text{ J s}) \cdot (2{,}78 \cdot 10^{14} \text{ Hz}) = 1{,}84 \cdot 10^{-19} \text{ J},$$

$$E_{c,IR} = E_{IR} - W_0 = 1{,}84 \cdot 10^{-19} \text{ J} - 3{,}04 \cdot 10^{-19} \text{ J} = -1{,}20 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

Como la energía cinética no puede ser negativa, esto indica que no se produce efecto fotoeléctrico con el láser infrarrojo. Completamos la tabla:

Tipo de láser	Longitud onda (nm)	Frecuencia ($\cdot 10^{14}$ Hz)	E fotón ($\cdot 10^{-19}$ J)	E_c electrón ($\cdot 10^{-19}$ J)
Láser azul	460	6,52	4,32	1,28
Láser verde	532	5,64	3,74	0,70
Láser infrarrojo	1080	2,78	1,84	–

Observamos que los láseres azul y verde tienen frecuencias mayores que la frecuencia umbral ($f_b, f_v > f_0$), por lo que se produce efecto fotoeléctrico, mientras que el láser infrarrojo tiene una frecuencia menor que la umbral ($f_{IR} < f_0$), por lo que no se produce efecto fotoeléctrico. Representamos gráficamente:



Hemos utilizado que 1 eV $= 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ J para convertir la energía cinética a electronvoltios:

$$E_c \text{ (eV)} = \frac{E_c \text{ (J)}}{1{,}602 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV}}.$$

Por lo tanto, los láseres azul y verde tienen frecuencias mayores que la frecuencia umbral ($f_b, f_v > f_0$), por lo que se produce efecto fotoeléctrico, mientras que el láser infrarrojo tiene una frecuencia menor que la umbral ($f_{IR} < f_0$), por lo que no se produce efecto fotoeléctrico.

b) Il·luminem el càtode amb un làser de freqüència $8,00 \cdot 10^{14}$ Hz. Calculeu la velocitat i la longitud d'ona de De Broglie dels electrons arrencats del càtode amb la radiació d'aquest làser.

Cálculo de la energía cinética E_c:

$$E_c = hf - W_0 = (6{,}63 \cdot 10^{-34} \text{ J s}) \cdot (8{,}00 \cdot 10^{14} \text{ Hz}) - 3{,}04 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 2{,}26 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

Utilizando la relación:

$$E_c = \frac{1}{2} m_e v^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2E_c}{m_e}}.$$

Sustituyendo los valores:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 2{,}26 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}} = 7{,}04 \cdot 10^5\ \text{m/s}.$$

Cálculo de la longitud de onda de De Broglie λ:

$$\lambda = \frac{h}{m_e v} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s}}{9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 7{,}04 \cdot 10^5\ \text{m/s}} = 1{,}03 \cdot 10^{-9}\ \text{m}.$$

Por lo tanto, la velocidad de los electrones es $v = 7{,}04 \cdot 10^5$ m/s y la longitud de onda de De Broglie es $\lambda = 1{,}03$ nm.